This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

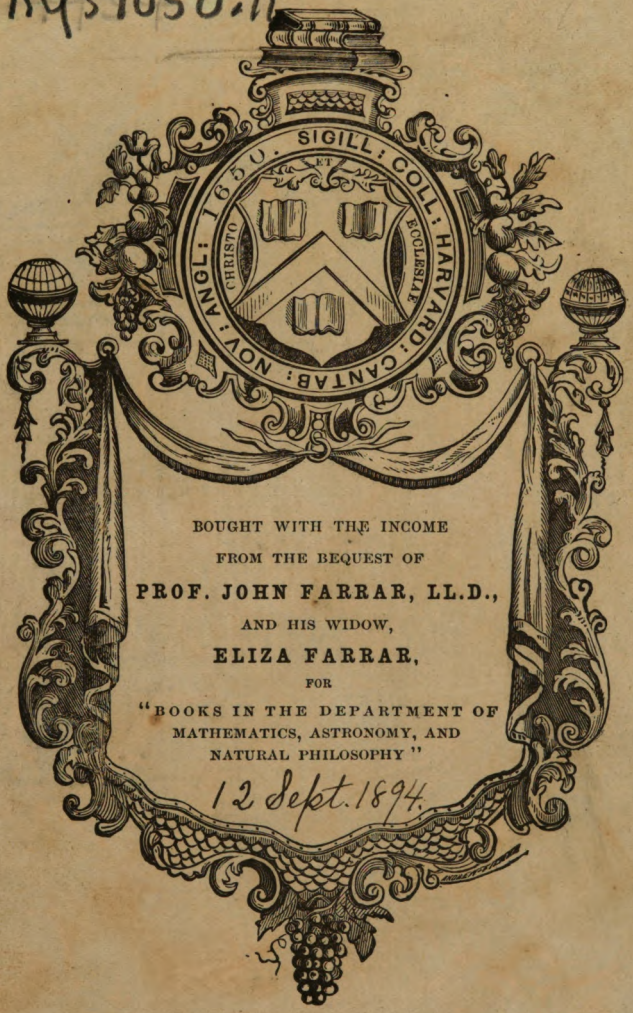
We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Phys 1050.11



BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
12 Sept. 1894.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

NOTIONS

SUR LA

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ.

Digitized by Google

14974 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Fils, quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

NOTIONS

SUR LA

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ,

Émile
PAR E. SARRAU,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

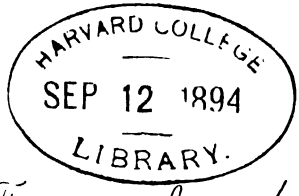
Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

(Tous droits réservés.)

Digitized by Google

~~V. 4934~~
Phys 1050.11



Farrar fund.

Digitized by Google

NOTIONS

SUR LA

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ.

L'exposé qui suit est la reproduction de Leçons professées à l'École Polytechnique. La théorie de l'élasticité a été récemment introduite dans les programmes de cette École et le nombre des leçons qui lui sont consacrées est nécessairement fort restreint. On a pensé qu'il ne serait pas sans intérêt pour l'enseignement de publier un résumé qui, en raison de sa brièveté même, offre l'avantage de ne présenter que les parties strictement essentielles d'une théorie dont les éléments sont épars dans un grand nombre de Traités et de Mémoires originaux.

I. — Théorie des tensions intérieures.

1. *Définition.* — Soit un système de points matériels, infiniment rapprochés, dans lequel on suppose des forces intérieures. Imaginons, dans ce système, un élément plan dont l'aire soit ω; le plan P de cet élément, indéfiniment prolongé, partage le système en deux parties A et B. Considérons, parmi les actions exercées par A sur B, celles dont la direction traverse ω et supposons

Digitized by Google

que l'on opère leur réduction comme si B était un solide invariable. On admet que le système de ces forces est réductible à leur résultante appliquée au centre de gravité M de l'élément plan [1], et cette résultante R est ce que l'on appelle la *tension élémentaire* sur celle des faces de l'élément plan qui est contiguë à A.

La résultante R est généralement oblique à l'élément. Si elle est normale à cet élément et dirigée vers A, elle représente une *traction;* si, encore normale à cet élément, elle est dirigée vers B, elle représente une *pression;* si elle est comprise dans le plan de l'élément, on l'appelle *tangentielle*.

2. La tension élémentaire, sur celle des faces de l'élément qui est contiguë à B, s'obtiendrait de même en composant celles des actions exercées par B sur A dont la direction traverse ω. En vertu du principe de l'action et de la réaction, cette nouvelle résultante est égale et opposée à la précédente, de sorte que les tensions élémentaires sur les deux faces d'un élément plan quelconque sont égales et opposées.

3. Il résulte immédiatement de la définition précédente que, si l'on considère dans le système un volume V limité par une surface quelconque, le système des actions exercées par les points extérieurs à V sur les points intérieurs est équivalent au système des tensions élémentaires exercées sur les faces extérieures de tous les éléments de la surface limite.

---

[1] En fait, le système des forces considérées est réductible à la résultante R appliquée au centre de gravité de l'élément plan et à un couple dont l'ordre infinitésimal est supérieur de deux unités à celui de la résultante; on ne tient pas compte de ce couple.

Digitized by Google

4. Divisons la résultante R par l'aire ω; on admet que le quotient tend vers une limite finie quand ω tend vers zéro, et cette limite E est ce que l'on appelle la *tension par unité de surface,* ou simplement, la *tension* au point M sur le plan P. En considérant ω comme infiniment petit, on peut poser $R = E\omega$, de sorte que la tension élémentaire s'obtient en multipliant la tension par l'aire de l'élément.

5. La tension E, sur des plans P parallèles, menés par tous les points d'un système, varie d'un point à un autre en intensité et en direction; de plus, en un même point M, elle varie avec l'orientation du plan P; enfin, s'il y a mouvement intérieur, pour un point et une orientation déterminés, la tension varie avec le temps.

Si donc on désigne par

x, y, z les coordonnées du point M;

α, β, γ les cosinus directeurs de la normale au plan P dirigée vers la région contiguë à celle des faces de ce plan à laquelle se rapporte la tension;

X, Y, Z les composantes de la tension;

les quantités X, Y, Z sont, en général, des fonctions des variables (x, y, z; α, β, γ; t) qui, si elles étaient déterminées, feraient connaître à chaque instant la direction et l'intensité de la tension élémentaire sur un élément quelconque.

Nous allons établir que la détermination de ces trois fonctions revient à celle de six nouvelles fonctions de quatre variables seulement (x, y, z, t) et que, de plus, ces nouvelles fonctions sont liées entre elles par trois équations aux dérivées partielles, linéaires du premier ordre.

Ces diverses relations résultent de la nécessité qu'une portion quelconque du système soit en équilibre sous

Digitized by Google

l'action des tensions élémentaires exercées sur sa surface et des forces qui sollicitent sa masse.

6. Afin d'exprimer les conditions de cet équilibre, nous considérons un point quelconque M du système et un élément de volume ϖ dont ce point fasse partie. La densité en M étant ρ, nous désignerons par $\rho\varpi X_0$, $\rho\varpi Y_0$, $\rho\varpi Z_0$ les composantes, suivant les axes coordonnés, de la résultante des forces extérieures qui sollicitent la masse de l'élément ϖ. Si le système est en mouvement, les composantes X_0, Y_0, Z_0 doivent comprendre, d'après le principe de d'Alembert, les forces d'inertie dont les valeurs sont, pour l'unité de masse, $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2z}{dt^2}$.

Nous désignerons, en outre, par les indices 1, 2, 3 les valeurs que prennent les composantes X, Y, Z de la tension lorsque la direction de la normale au plan sur lequel elle s'exerce se confond successivement avec les directions positives des axes OX, OY, OZ. Les neuf quantités

$$\begin{array}{lll} X_1, & Y_1, & Z_1, \\ X_2, & Y_2, & Z_2, \\ X_3, & Y_3, & Z_3 \end{array}$$

sont, ainsi que X_0, Y_0, Z_0 et ρ, des fonctions de quatre variables, qui sont le temps t et les coordonnées x, y, z du point M.

7. *Équilibre du parallélépipède élémentaire.* — Cela posé, imaginons que l'élément ϖ soit un parallélépipède dont les arêtes a, b, c soient parallèles aux axes et dont le point M soit le centre.

On sait que les forces extérieures qui agissent sur cet

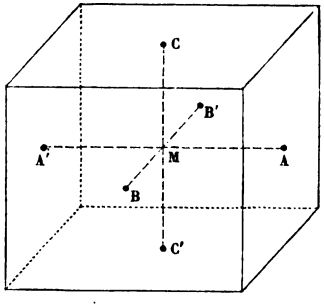
Digitized by Google

élément satisfont aux six conditions d'équilibre d'un solide invariable, suivant lesquelles :

1° La somme des projections des forces sur trois axes est nulle pour chaque axe;

2° La somme des moments des forces par rapport à trois axes est nulle pour chaque axe.

Fig. 1.



Le système de ces forces est équivalent aux tensions élémentaires agissant aux centres des six faces dont les aires sont bc, ca, ab, et aux forces $\rho\varpi X_0$, $\rho\varpi Y_0$, $\rho\varpi Z_0$ appliquées au point M.

Évaluons d'abord la somme des composantes de toutes les forces suivant l'axe des x; les faces A et A' donnent à cette somme les deux termes

$$bc\left(X_1 + \frac{a}{2}\frac{dX_1}{dx}\right), \quad -bc\left(X_1 - \frac{a}{2}\frac{dX_1}{dx}\right),$$

dont l'ensemble se réduit à $\varpi\frac{dX_1}{dx}$.

Le groupe des faces B, B' et celui des faces C, C' donnent de même, respectivement, $\varpi\frac{dX_2}{dy}$ et $\varpi\frac{dX_3}{dz}$; enfin, les forces qui agissent sur la masse ajoutent un dernier

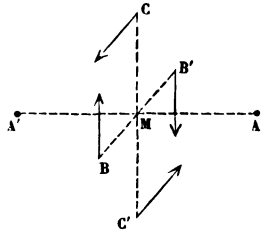
Digitized by Google

terme $\rho\varpi X_0$. En égalant à zéro la somme de ces forces et en divisant par ϖ, on a la première des équations suivantes; les deux autres résultent d'une sommation semblable des composantes parallèles à OY, puis des composantes parallèles à OZ :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dX_1}{dx} + \dfrac{dX_2}{dy} + \dfrac{dX_3}{dz} + \rho X_0 = 0, \\ \dfrac{dY_1}{dx} + \dfrac{dY_2}{dy} + \dfrac{dY_3}{dz} + \rho Y_0 = 0, \\ \dfrac{dZ_1}{dx} + \dfrac{dZ_2}{dy} + \dfrac{dZ_3}{dz} + \rho Z_0 = 0. \end{cases}$$

8. Écrivons maintenant l'équation des moments par rapport à un axe parallèle à OX passant par le point M. La résultante des forces $\rho\varpi X_0$, $\rho\varpi Y_0$, $\rho\varpi Z_0$, étant appliquée au point M, donne un moment nul. Les composantes des tensions élémentaires rencontrent l'axe ou lui sont parallèles, à l'exception des deux composantes, parallèles à OZ, appliquées en B, B′ et des deux compo-

Fig. 2.



santes, parallèles à OY, appliquées en C, C′. Les deux premières sont dirigées en sens contraires et leurs valeurs ne diffèrent de la composante caZ_2 relative au point M que de quantités infiniment petites par rapport à elles-mêmes; elles forment un couple dont le bras de levier

Digitized by Google

est égal à b et dont le moment est

$$caZ_2 \times b = abcZ_2 = \varpi Z_2.$$

De même, les forces appliquées en C, C′ constituent un autre couple dont le moment est $-\varpi Y_3$. L'équation des moments est, par conséquent, $\varpi(Z_2 - Y_3) = 0$; d'où $Z_2 = Y_3$.

On a deux équations analogues en rapportant les moments à des axes parallèles à OY et OZ passant par le point M, ce qui donne le système

$$(2) \qquad Z_2 = Y_3, \qquad X_3 = Z_1, \qquad Y_1 = X_2;$$

les équations expriment que, des neuf composantes, six sont égales deux à deux. Afin de préciser les composantes égales, désignons les neuf composantes par la lettre E affectée de deux des indices x, y, z; le premier indiquant l'axe perpendiculaire au plan sur lequel s'exerce la tension, le second l'axe parallèle à la composante. On a ainsi

$$(3) \qquad \begin{cases} X_1 = E_{x,x}, & Y_1 = E_{x,y}, & Z_1 = E_{x,z}, \\ X_2 = E_{y,z}, & Y_2 = E_{y,y}, & Z_2 = E_{y,z}, \\ X_3 = E_{z,x}, & Y_3 = E_{z,y}, & Z_3 = E_{z,z}, \end{cases}$$

et les relations (2) deviennent

$$(4) \qquad E_{y,z} = E_{z,y}, \qquad E_{z,x} = E_{x,z}, \qquad E_{x,y} = E_{y,x}.$$

Elles expriment que, si l'on intervertit les deux indices, la composante conserve la même valeur.

9. *Introduction des* N, T. — Nous poserons désormais

$$E_{x,x} = N_1, \qquad E_{y,y} = N_2, \qquad E_{z,z} = N_3,$$
$$E_{y,z} = T_1, \qquad E_{z,x} = T_2, \qquad E_{x,y} = T_3.$$

D'après cette notation, les N donnent les composantes

Digitized by Google

normales de la tension pour les trois plans perpendiculaires aux axes et les T donnent les composantes tangentielles qui sont égales deux à deux. Le système des neuf composantes est alors représenté par le tableau suivant

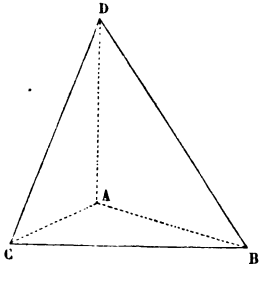
$$\begin{matrix} N_1, & T_3, & T_2, \\ T_3, & N_2, & T_1, \\ T_2, & T_1, & N_3, \end{matrix}$$

et les équations (1) peuvent s'écrire

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \rho X_0 = 0, \\ &\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + \rho Y_0 = 0, \\ &\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + \rho Z_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

10. *Équilibre du tétraèdre élémentaire.* — Supposons, en second lieu, que l'élément de volume ϖ, dont le point M fait partie, soit un tétraèdre dont les arêtes AB, AC, AD sont parallèles aux axes. Désignons par α,

Fig. 3.



β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à la face BCD, par ω l'aire de cette face, par ω_1, ω_2, ω_3 les aires des trois faces triangulaires respectivement perpendiculaires à OX, OY, OZ.

Digitized by Google

D'après un théorème sur la projection des aires, on a

$$(6) \qquad \omega_1 = \alpha\omega, \qquad \omega_2 = \beta\omega, \qquad \omega_3 = \gamma\omega.$$

Cela posé, les tensions élémentaires sur les quatre faces du tétraèdre et les forces qui sollicitent sa masse se faisant équilibre, les sommes des projections de ces forces sur chaque axe doivent être nulles.

En projetant les forces sur l'axe des x, les faces ω, ω_1, ω_2, ω_3 donnent respectivement les termes ωX, $-\omega_1 N_1$, $-\omega_2 T_3$, $-\omega_3 T_2$; les forces qui agissent sur la masse donnent le terme $\rho\varpi X_0$, ϖ étant le volume du tétraèdre qui est un infiniment petit du troisième ordre négligeable par rapport aux autres qui sont du second. En égalant à zéro la somme de tous ces termes et en ayant égard aux équations (6), on a la première des équations suivantes

$$(7) \qquad \begin{cases} X = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ Y = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ Z = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma, \end{cases}$$

les deux autres équations résultant d'une sommation semblable des composantes parallèles à OY, puis parallèles à OZ.

Les équations (7) montrent comment X, Y, Z dépendent de α, β, γ; il résulte de ces équations que la détermination de X, Y, Z se réduit à celle des six fonctions N, T, lesquelles sont à quatre variables x, y, z, t et doivent vérifier les trois équations (5), qui sont aux dérivées partielles linéaires du premier ordre.

11. *Composante de la tension suivant une direction quelconque.* — Soit MN(α, β, γ) la normale à un plan

Digitized by Google

P passant par le point M; projetons la tension correspondante sur une direction quelconque MS$(\alpha', \beta', \gamma')$. Désignons cette projection par $E_{n,s}$, le premier indice se rapportant à la normale au plan et le second à la direction suivant laquelle on estime la tension. On a

$$E_{n,s} = X\alpha' + Y\beta' + Z\gamma',$$

et, en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs (7), on obtient

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} E_{n,s} = {} & N_1\alpha\alpha' + N_2\beta\beta' + N_3\gamma\gamma' + T_1(\beta\gamma' + \gamma\beta') \\ & + T_2(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') + T_3(\alpha\beta' + \beta\alpha'). \end{aligned} \right.$$

Cette expression ne changeant pas quand on permute les deux systèmes de variables (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, on a

$$E_{n,s} = E_{s,n},$$

ce qui démontre un théorème général dont la réciprocité des composantes tangentielles (n° 8) n'est qu'un cas particulier.

12. *Surface directrice.* — En particulier, la composante de la tension, normale au plan sur lequel elle s'exerce, s'obtient en confondant la direction MS avec la direction MN. En désignant cette composante par N. la formule (8) donne

$$(9) \quad N = N_1\alpha^2 + N_2\beta^2 + N_3\gamma^2 + 2T_1\beta\gamma + 2T_2\gamma\alpha + 2T_3\alpha\beta,$$

et cette composante sera une traction ou une pression suivant que sa valeur sera positive ou négative.

Supposons maintenant qu'à partir du point M on porte, sur la normale au plan, une longueur MN dont le carré représente la valeur absolue de $\frac{1}{N}$ et, le point M étant pris comme origine, désignons par x, y, z les

Digitized by Google

coordonnées du point N. On aura

$$(10) \qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pm N}},$$

en prenant le signe + ou — suivant que N est positif ou négatif. En portant dans l'équation (9) les valeurs α, β, γ tirées des équations (10), il vient

$$(11) \quad N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 + 2T_1 yz + 2T_2 zx + 2T_3 xy = \pm 1,$$

de sorte que le lieu du point N est une surface du second degré; cette surface est dite *directrice*.

Lorsque la valeur de N conserve le même signe, quelle que soit la direction (α, β, γ), cette surface est un ellipsoïde; mais, si cette valeur change de signe, l'ellipsoïde est remplacé par le système de deux hyperboloïdes, dont l'un correspond au signe +, l'autre au signe —. Ces deux hyperboloïdes, dont l'un est à une nappe et l'autre à deux nappes, sont conjugués, c'est-à-dire qu'ils ont le même centre avec les mêmes axes et un même cône asymptote.

La composante N est nulle pour les plans qui sont perpendiculaires aux génératrices du cône asymptote et l'on a, sur ces plans, des tensions tangentielles.

13. *Tensions principales.* — Si l'on prend pour axes coordonnés les axes principaux de la surface directrice, les rectangles disparaissent de son équation, de sorte que l'on doit avoir $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$; les composantes tangentielles sont donc nulles sur des plans perpendiculaires aux nouveaux axes, et les tensions sur ces plans se réduisent à leurs composantes normales. Donc, *en tout point du système, il y a trois plans sur lesquels les tensions sont normales.*

Digitized by Google

Les trois tensions, normales aux plans sur lesquels elles s'exercent, sont dites *principales*.

14. *Ellipsoïdes des tensions.* — On obtient une autre surface du second degré, qui est toujours un ellipsoïde, en portant, à partir du point M, sur la direction même de la tension, une longueur ME égale à sa grandeur.

En effet, les coordonnées du point E sont alors les composantes X, Y, Z de la tension et l'on déduit des relations (7), pour α, β, γ, des valeurs linéaires en X, Y, Z. En portant ces valeurs dans l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

on a l'équation d'un ellipsoïde.

Les directions des axes de cet ellipsoïde se confondent avec celles des tensions principales; car, en prenant celles-ci pour axes coordonnés, on a

$$T_1 = 0, \qquad T_2 = 0, \qquad T_3 = 0,$$

et, des équations (7) réduites aux suivantes

$$X = N_1 \alpha, \qquad Y = N_2 \beta, \qquad Z = N_3 \gamma,$$

on tire l'équation

$$\left(\frac{X}{N_1}\right)^2 + \left(\frac{Y}{N_2}\right)^2 + \left(\frac{Z}{N_3}\right)^2 = 1,$$

qui est celle d'un ellipsoïde rapporté à ses axes.

15. *Formules de transformation des tensions.* — Supposons que l'on change la direction des axes coordonnés; soient

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',$$
$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'$$

Digitized by Google

les formules de transformation, dans lesquelles les lettres α, β, γ affectées des indices 1, 2, 3 représentent, suivant la règle connue, les cosinus des angles que les nouveaux axes font avec les anciens.

Nous avons désigné par (N, T) les composantes des tensions exercées, au point M, sur des plans perpendiculaires aux anciens axes; appelons de même

$$\begin{array}{lll} N'_1, & T'_3, & T'_2, \\ T'_3, & N'_2, & T'_1, \\ T'_2, & T'_1, & N'_3 \end{array}$$

les composantes, suivant les nouveaux axes, des tensions exercées, au même point M, sur des plans perpendiculaires aux x', y', z'.

Les (N′, T′) sont les coefficients de l'équation de la surface directrice rapportée à des parallèles aux nouveaux axes, menées par le point M, et il suffit de porter les valeurs précédentes de x, y, z dans l'équation (11), pour obtenir les expressions suivantes qui donnent les (N′, T′) en fonction des (N, T),

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} N'_1 &= N_1\alpha_1^2 + N_2\beta_1^2 + N_3\gamma_1^2 + 2T_1\beta_1\gamma_1 \\ &\quad + 2T_2\gamma_1\alpha_1 + 2T_3\alpha_1\beta_1, \\ N'_2 &= N_1\alpha_2^2 + N_2\beta_2^2 + N_3\gamma_2^2 + 2T_1\beta_2\gamma_2 \\ &\quad + 2T_2\gamma_2\alpha_2 + 2T_3\alpha_2\beta_2, \\ N'_3 &= N_1\alpha_3^2 + N_2\beta_3^2 + N_3\gamma_3^2 + 2T_1\beta_3\gamma_3 \\ &\quad + 2T_2\gamma_3\alpha_3 + 2T_3\alpha_3\beta_3; \\ T'_1 &= N_1\alpha_2\alpha_3 + N_2\beta_2\beta_3 + N_3\gamma_2\gamma_3 + T_1(\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3) \\ &\quad + T_2(\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3) + T_3(\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3), \\ T'_2 &= N_1\alpha_3\alpha_1 + N_2\beta_3\beta_1 + N_3\gamma_3\gamma_1 + T_1(\beta_3\gamma_1 + \gamma_3\beta_1) \\ &\quad + T_2(\gamma_3\alpha_1 + \alpha_3\gamma_1) + T_3(\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1), \\ T'_3 &= N_1\alpha_1\alpha_2 + N_2\beta_1\beta_2 + N_3\gamma_1\gamma_2 + T_1(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2 \\ &\quad + T_2(\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2) + T_3(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2). \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

II. — Déplacement général d'un système de points.

16. *Formules fondamentales.* — Considérons un système de points infiniment rapprochés rapporté à trois axes rectangulaires. Concevons ce système déplacé de telle manière que les projections u, v, w du déplacement d'un point quelconque M soient des fonctions continues des coordonnées primitives x, y, z de ce point.

Pour un point $N(x+h, y+k, z+l)$, infiniment voisin de M, les projections du déplacement sont

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} u' &= u + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{dv}{dz}l,\\ v' &= v + \frac{dv}{dx}h + \frac{dv}{dy}k + \frac{dv}{dz}l,\\ w' &= w + \frac{dw}{dx}h + \frac{dw}{dy}k + \frac{dw}{dz}l. \end{aligned}\right.$$

Imaginons, par le point M, des axes parallèles à OX, OY, OZ; par rapport à ces axes, les coordonnées de N sont h, k, l avant le déplacement; après le déplacement, ces coordonnées deviennent

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} h' &= h + u' - u,\\ k' &= k + v' - v,\\ l' &= l + w' - w, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, d'après les formules (13),

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} h' &= \left(1 + \frac{du}{dx}\right)h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l,\\ k' &= \frac{dv}{dx}h + \left(1 + \frac{dv}{dy}\right)k + \frac{dv}{dz}l,\\ l' &= \frac{dw}{dx}h + \frac{dw}{dy}k + \left(1 + \frac{dw}{dz}\right)l. \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Ces expressions sont linéaires en h, k, l; par suite, les points N situés, dans le voisinage de M, sur une surface $F(h, k, l) = 0$, seront après le déplacement sur une surface du même degré. Ainsi, les points d'une sphère viendront sur un ellipsoïde; les points d'un plan sur un plan; de même, les points qui étaient sur une droite restent sur une droite.

17. Dans ce qui suit, nous considérerons exclusivement des déplacements tels que les différences $h' - h$, $k' - k$, $l' - l$ soient très petites par rapport à h, k, l. Dans cette hypothèse, les neuf dérivées partielles qui entrent dans les formules (13) et (15) ont des valeurs très petites que nous traiterons comme des infiniment petits. Nous désignerons par δ la variation très petite qu'éprouve une quantité quelconque par suite du déplacement et nous traiterons les δ comme des différentielles.

18. *Décomposition du déplacement.* — Les formules (13) montrent que le déplacement d'un élément entourant le point M est déterminé par les valeurs que présentent en ce point les neuf dérivées partielles de u, v, w par rapport à x, y, z.

On peut substituer à ces dérivées neuf nouveaux coefficients dont l'interprétation géométrique est plus commode; en posant

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{lll} & a_1 = \dfrac{du}{dx}, \quad a_2 = \dfrac{dv}{dy}, \quad a_3 = \dfrac{dw}{dz}, & \\ 2b_1 = \dfrac{dw}{dy} + \dfrac{dv}{dz}, & 2b_2 = \dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}, & 2b_3 = \dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dy}, \\ 2p_1 = \dfrac{dw}{dy} - \dfrac{dv}{dz}, & 2p_2 = \dfrac{du}{dz} - \dfrac{dw}{dx}, & 2p_3 = \dfrac{dv}{dx} - \dfrac{du}{dy}, \end{array}\right.$$

Digitized by Google

les expressions (13) peuvent s'écrire

$$(17) \quad \begin{cases} u' = u + p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ v' = v + p_3 h - p_1 l + b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ w' = w + p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l. \end{cases}$$

On en conclut que le déplacement (u', v', w') du point N s'obtient en composant :

1° Le déplacement (u, v, w);

2° Le déplacement dont les composantes sont

$$(18) \quad \begin{cases} u_1 = p_2 l - p_3 k, \\ v_1 = p_3 h - p_1 l, \\ w_1 = p_1 k - p_2 h; \end{cases}$$

3° Le déplacement dont les composantes sont

$$(19) \quad \begin{cases} u_2 = a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ v_2 = b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ w_2 = b_2 h + b_1 k + a_3 l. \end{cases}$$

Le premier de ces déplacements composants est identique au déplacement du point M.

Le deuxième est une rotation, aux composantes angulaires (p_1, p_2, p_3) autour d'un axe passant par le point M.

Le troisième peut se représenter comme il suit.

19. Soit la série des surfaces homothétiques ayant pour équation

$$(20) \quad a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2 b_1 yz + 2 b_2 zx + 2 b_3 xy = \lambda.$$

Supposons le centre au point M et considérons celle de ces surfaces qui passe par le point N, ce qui détermine λ par la condition

$$(21) \quad a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + 2 b_1 kl + 2 b_2 lh + 2 b_3 hk = \lambda.$$

Digitized by Google

D'après les valeurs (19), le plan tangent à cette surface au point N a pour équation

$$(22) \qquad u_2 x + v_2 y + w_2 z = \lambda.$$

Par suite, le déplacement (u_2, v_2, w_2) du point N est normal à la surface qui passe par ce point. De plus, si l'on désigne par δ la grandeur de ce déplacement et par ϖ la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan tangent, on a

$$\varpi = \frac{\lambda}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}} = \frac{\lambda}{\delta}:$$

d'où il résulte que la grandeur du déplacement est donnée par la formule $\delta = \frac{\lambda}{\varpi}$.

20. En résumé, on peut dire que le déplacement d'un élément environnant le point M se compose d'une translation, d'une rotation autour d'un axe et d'une déformation.

La translation est déterminée par les composantes u, v, w du déplacement du point M.

La rotation est déterminée par les quantités p_1, p_2, p_3, que nous appellerons *rotations élémentaires*.

La déformation est déterminée par les six quantités a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, que nous appellerons *déformations élémentaires*.

Les rotations et déformations élémentaires sont définies par les relations (16).

Il est à remarquer que, d'après ces relations, les rotations disparaissent lorsque u, v, w sont les dérivées partielles d'une fonction $\varphi(x, y, z)$ des coordonnées.

21. *Dilatation linéaire.* — On appelle *dilatation*

Digitized by Google

linéaire le rapport de l'accroissement d'une longueur à sa valeur primitive.

Cherchons la variation très petite de la distance r du point M au point N dont les coordonnées relatives sont h, k, l. De la relation $r^2 = h^2 + k^2 + l^2$, on tire

$$r\,\delta r = h\,\delta h + k\,\delta k + l\,\delta l.$$

Les relations (14) et (17) donnent

$$(23)\qquad \begin{cases} \delta h = p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ \delta k = p_3 h - p_1 l + b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ \delta l = p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l, \end{cases}$$

et l'on a, par suite,

$$(24)\qquad r\,\delta r = a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + 2 b_1 kl + 2 b_2 lh + 2 b_3 hk.$$

Désignons par a la dilatation linéaire et par α, β, γ les cosinus directeurs de MN; on a

$$a = \frac{\delta r}{r}, \qquad \alpha = \frac{h}{r}, \qquad \beta = \frac{k}{r}, \qquad \gamma = \frac{l}{r},$$

et la formule (24) devient

$$(25)\qquad a = a_1 \alpha^2 + a_2 \beta^2 + a_3 \gamma^2 + 2 b_1 \beta\gamma + 2 b_2 \gamma\alpha + 2 b_3 \alpha\beta.$$

Cette formule donne la dilatation linéaire dans la direction (α, β, γ). La dilatation se réduit aux valeurs a_1, a_2, a_3 lorsque la direction (α, β, γ) devient successivement parallèle aux axes OX, OY, OZ.

22. *Dilatation angulaire.* — Soient N_1, N_2 deux points infiniment voisins de M; désignons par les lettres r, h, k, l, affectées des indices 1 et 2, les distances de ces points au point M et leurs coordonnées relatives. En

Digitized by Google

appelant V l'angle N_1MN_2, on a

$$r_1 r_2 \cos V = h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2;$$

d'où, par différentiation,

$$\begin{aligned}\cos V \delta(r_1 r_2) - r_1 r_2 \sin V . \delta V \\ = h_2 \delta h_1 + k_2 \delta k_1 + l_2 \delta l_1 + h_1 \delta h_2 + k_1 \delta k_2 + l_1 \delta l_2.\end{aligned}$$

Cette formule se simplifie lorsque l'angle V est droit et, en ayant égard aux formules (17), il vient alors

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2} r_1 r_2 . \delta V = a_1 h_1 h_2 + a_2 k_1 k_2 + a_3 l_1 l_2 + b_1(k_1 l_2 + l_1 k_2) \\ + b_2(l_1 h_2 + h_1 l_2) + b_3(h_1 k_2 + k_1 h_2)\end{aligned}$$

ou, en posant $-\frac{1}{2}\delta V = b$ et en introduisant les cosinus directeurs de MN_1, MN_2,

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} b = a_1 \alpha_1 \alpha_2 + a_2 \beta_1 \beta_2 + a_3 \gamma_1 \gamma_2 + b_1(\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) \\ + b_2(\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) + b_3(\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2). \end{aligned} \right.$$

Cette formule donne la moitié de la diminution qu'éprouve, par la déformation, l'angle primitivement droit des deux directions $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

Cette quantité se réduit à b_1, b_2, b_3 lorsque les deux directions dont il s'agit sont successivement parallèles à (OY, OZ), (OZ, OX), (OX, OY).

23. *Dilatations et glissements.* — Ces propositions définissent la signification géométrique des six déformations élémentaires.

Imaginons un parallélépipède élémentaire dont les arêtes soient parallèles aux axes coordonnés; le déplacement général du système transporte ce parallélépipède en le déformant. Il résulte de ce qui précède que les quantités a_1, a_2, a_3 représentent les dilatations des arêtes et que les quantités $2b_1$, $2b_2$, $2b_3$ représentent les

Digitized by Google

diminutions des angles, primitivement droits, compris entre les arêtes prises deux à deux.

On appelle fréquemment *dilatations* les quantités a_1, a_2, a_3 et *glissements,* ou *distorsions,* les quantités $2b_1$, $2b_2$, $2b_3$.

24. *Surface des dilatations.* — Reprenons la formule (25) qui donne la dilatation linéaire dans une direction quelconque. Si l'on porte, à partir du point M, dans la direction (α, β, γ), une longueur MA égale à la valeur absolue de la dilatation a et si, le point M étant pris comme origine, on appelle x, y, z les coordonnées du point A, on a

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pm a}},$$

le signe étant + ou —, suivant que a est positif ou négatif. En éliminant α, β, γ entre ces équations et l'équation (25), il vient

$$(27) \quad a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1yz + 2b_2zx + 2b_3xy = \pm 1,$$

de sorte que le lieu du point A est une surface du second degré. Cette surface est un ellipsoïde s'il y a, en tous sens, ou dilatation ou condensation autour du point M. S'il y a dilatation dans certaines directions et condensation dans d'autres, l'ellipsoïde est remplacé par deux hyperboloïdes conjugués.

25. *Dilatations principales.* — Si l'on prend pour axes coordonnés les axes principaux de la surface des dilatations, les rectangles disparaissent de son équation, de sorte que l'on a $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$. Donc, *en tout point d'un système qui subit une déformation, il existe trois directions rectangulaires telles que les an-*

Digitized by Google

gles de ces directions, prises deux à deux, restent droits après la déformation.

Les dilatations, dans ces directions, sont dites *principales*.

26. *Formules de transformation des déformations élémentaires.* — Quand on change la direction des axes coordonnés, les déformations élémentaires a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 deviennent a'_1, a'_2, a'_3, b'_1, b'_2, b'_3. Pour avoir les nouvelles valeurs en fonction des anciennes, il suffit de transformer l'équation (27) de la surface des dilatations par la substitution

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',$$
$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'.$$

Les coefficients de l'équation transformée donnent, pour les nouvelles déformations élémentaires, des expressions qui ne diffèrent de celles que l'on a obtenues, au n° 15, pour les (N′, T′), que par la substitution de (a, b) à (N, T).

Il est à remarquer que les formules que l'on obtient ainsi donnent la relation

$$a'_1 + a'_2 + a'_3 = a_1 + a_2 + a_3, \tag{28}$$

de sorte que la somme des dilatations suivant les axes est un invariant.

27. *Dilatation cubique.* — La déformation change le volume d'un élément environnant le point M. Le rapport de l'accroissement de ce volume à sa valeur pimitive est la *dilatation cubique* au point M. Tout volume étant

Digitized by Google

décomposable en tétraèdres, il suffit d'évaluer la dilatation d'un tétraèdre.

Considérons avec le point M trois points infiniment voisins N_1, N_2, N_3. Désignons leurs coordonnées relatives par les lettres h, k, l affectées des indices 1, 2, 3. Le volume du tétraèdre dont ces quatre points sont les sommets est

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix}.$$

En désignant par (h', k', l') les valeurs de (h, k, l) après la déformation, ce volume devient

$$V' = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} h'_1 & k'_1 & l'_1 \\ h'_2 & k'_2 & l'_2 \\ h'_3 & k'_3 & l'_3 \end{vmatrix}.$$

En ayant égard aux formules (15) qui expriment (h', k', l') en fonction de (h, k, l), on voit immédiatement, par la règle de la multiplication des déterminants, que V' est le produit de V par le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} & \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx} & 1 + \frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dx} & \frac{dw}{dy} & 1 + \frac{dw}{dz} \end{vmatrix}.$$

On a donc $V' = V\Delta$, et la dilatation cubique θ, égale à $\frac{V' - V}{V}$, est donnée par la formule

$$\theta = \Delta - 1. \tag{29}$$

Cette expression, ne dépendant pas de l'orientation du

Digitized by Google

tétraèdre, s'étend à un volume quelconque; elle s'applique à des déplacements quelconques u, v, w, sans restriction relative à l'ordre de grandeur des neuf dérivées partielles.

Quand ces dérivées sont très petites, l'expression trouvée se réduit à la suivante :

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \tag{30}$$

28. Cette dernière formule peut s'établir comme il suit : soit un élément parallélépipédique, ayant un sommet au point M, dont les arêtes soient dans les directions des dilatations principales. Désignons par a'_1, a'_2, a'_3 ces dilatations principales.

Par la déformation, les arêtes sont respectivement multipliées par $1 + a'_1$, $1 + a'_2$, $1 + a'_3$; de plus les angles restent droits. Donc le volume de l'élément est multiplié par $(1 + a'_1)(1 + a'_2)(1 + a'_3)$, ou par $1 + a'_1 + a'_2 + a'_3$, en négligeant les quantités très petites d'un ordre supérieur au premier. Il en résulte que la dilatation cubique est

$$\theta = a'_1 + a'_2 + a'_3.$$

On a donc, pour un système d'axes quelconques, d'après la relation (28),

$$\theta = a_1 + a_2 + a_3,$$

ce qui donne la formule (30).

III. — Expressions des tensions dans un système élastique déformé.

29. *Expressions des* (N, T) *en fonction des* (a, b). — Nous appellerons *état naturel* d'un système matériel

Digitized by Google

celui où il n'existe aucune tension. Si, à partir de cet état, on déforme le système par l'application de forces extérieures, les tensions cessent d'être nulles par suite de la variation des forces intérieures.

L'hypothèse fondamentale de la théorie de l'élasticité consiste à admettre que *l'action mutuelle de deux points matériels devient insensible dès que la distance de ces points dépasse une limite très petite.*

Par suite de cette hypothèse, la valeur que la tension, sur un plan quelconque, en un point quelconque M, acquiert après le déplacement de ce point, dépend uniquement de la déformation subie par la portion du système comprise dans un volume très petit autour du point que l'on considère. Or nous avons vu que la déformation de cet élément est complètement déterminée par les valeurs que présentent au point M, par suite de son déplacement, les six déformations élémentaires (a, b); donc les (N, T) sont des fonctions des (a, b).

Supposons que ces fonctions puissent être représentées par la série de Maclaurin et ne conservons, à cause de la petitesse des variables, que les termes du premier ordre. En remarquant en outre que, dans l'état naturel, les tensions sont nulles avec les déformations, on est conduit à ce résultat : *lorsqu'un système élastique subit une petite déformation à partir de son état naturel, les six composantes* (N, T) *sont des fonctions linéaires et homogènes des six déformations élémentaires* (a, b).

30. Les coefficients de ces fonctions, au nombre total de 36, dépendent de la constitution du système, autour du point M, avant la déformation. Ils peuvent être, si cette constitution est variable d'un point à un autre, des fonctions des coordonnées x, y, z de ce point. Ils se ré-

Digitized by Google

duisent à des constantes si, comme nous le supposerons dans ce qui suit, le système est homogène.

Nous écrirons comme il suit les valeurs des (N, T) :

$$(31)\qquad \begin{cases} N = \varphi(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \\ T = \psi(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \end{cases}$$

en nous rappelant que les caractéristiques φ et ψ, que nous affecterons successivement des indices 1, 2, 3, représentent des fonctions linéaires et homogènes.

Le nombre des coefficients se réduit beaucoup, lorsque le système possède, dans son état naturel, certains éléments de symétrie.

31. *Principe de la réduction.* — Supposons que le système présente, dans son état naturel, la même disposition par rapport à deux systèmes distincts d'axes coordonnés (S) et (S'). Il est évident que, relativement à (S'), les expressions des (N', T') en (a', b') doivent être les mêmes que celles des (N, T) en (a, b), relativement à (S).

Pour exprimer les conditions que cette identité de forme des fonctions impose aux variables dont elles dépendent, on opère comme il suit :

1° On exprime les (N', T') en fonction des (N, T) par les formules de transformation du n° 15.

2° Dans les expressions ainsi obtenues, on substitue aux (N, T) leurs valeurs (31);

3° On remplace enfin les (a, b) par leurs valeurs en fonction des (a', b') en se servant des formules de transformation du n° 26.

Les expressions fournies par ces trois opérations doivent se confondre, quand on supprime les accents, avec les formules (31) qui donnent les (N, T) en fonction des (a, b).

Digitized by Google

Nous allons appliquer cette méthode à quelques cas particuliers.

31. *Plan de symétrie.* — Supposons d'abord que, dans l'état naturel, le système soit distribué symétriquement, autour d'un point quelconque M, par rapport à un plan mené par ce point dans une orientation déterminée. Prenons l'axe des x perpendiculaire à ce plan; puis, conservant les axes OY, OZ, remplaçons l'axe OX par son prolongement. Les relations qui lient les (N', T') aux (N, T) deviennent

$$\begin{array}{lll} N'_1 = N_1, & N'_2 = N_2, & N'_3 = N_3, \\ T'_1 = T_1, & T'_2 = -T_2, & T'_3 = -T_3. \end{array}$$

On a de même, entre les (a, b) et les (a', b'), les relations

$$\begin{array}{lll} a_1 = a'_1, & a_2 = a'_2, & a_3 = a'_3, \\ b_1 = b'_1, & b_2 = -b'_2, & b_3 = -b'_3. \end{array}$$

Donc les relations (31) doivent rester les mêmes quand on y change à la fois les signes de T_2, T_3; b_2, b_3. Il faut, en conséquence, que les coefficients de b_2, b_3 soient nuls dans N_1, N_2, N_3, T_1 et que les coefficients de a_1, a_2, a_3, b_1 soient nuls dans T_2, T_3.

On a ainsi les formules suivantes, qui sont à vingt coefficients,

$$(32)\quad \left\{ \begin{array}{ll} N_1 = \varphi_1(a_1, a_2, a_3, b_1), & T_1 = \psi_1(a_1, a_2, a_3, b_1), \\ N_1 = \varphi_2(a_1, a_2, a_3, b_1), & T_2 = \psi_2(b_2, b_3), \\ N_3 = \varphi_3(a_1, a_2, a_3, b_1), & T_3 = \psi_3(b_2, b_3). \end{array} \right.$$

32. *Trois plans de symétrie.* — S'il y a, au même point M, un second plan de symétrie perpendiculaire à OY, les équations (32) doivent rester les mêmes quand on y change à la fois les signes de T_1, T_3; b_1, b_3. Cela montre qu'il y a alors nécessairement un troisième plan

Digitized by Google

de symétrie perpendiculaire à OZ, et les formules se réduisent aux suivantes, qui renferment douze coefficients,

$$(33)\qquad \begin{cases} N_1 = \varphi_1(a_1, a_2, a_3), & T_1 = h_1 b_1, \\ N_2 = \varphi_2(a_1, a_2, a_3), & T_2 = h_2 b_2, \\ N_3 = \varphi_3(a_1, a_2, a_3), & T_3 = h_3 b_3, \end{cases}$$

h_1, h_2, h_3 désignant des constantes.

On voit que les composantes T_1, T_2, T_3 s'annulent avec b_1, b_2, b_3; il en résulte que, dans ce cas, *les directions des tensions principales se confondent avec celles des dilatations principales.*

32. *Isotropie.* — Pour un système isotrope, les relations (31) doivent se transformer en elles-mêmes lorsqu'on substitue aux axes coordonnés tout autre système d'axes rectangulaires. Pour simplifier le calcul des conditions qui en résultent, nous attribuerons d'abord aux nouveaux axes certaines directions particulières, en remarquant de plus que les équations (33) doivent déjà comprendre, en particulier, celles qui sont relatives à l'isotropie.

33. Supposons d'abord que l'on permute circulairement les axes OX, OY, OZ. Ce changement d'axes produit les substitutions

$$\begin{pmatrix} N_1, & N_2, & N_3, & T_1, & T_2, & T_3 \\ N_2, & N_3, & N_1, & T_2, & T_3, & T_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & b_1, & b_2, & b_3 \\ a_2, & a_3, & a_1, & b_2, & b_3, & b_1 \end{pmatrix}$$

et les équations (33) doivent alors rester les mêmes.

Il en résulte d'abord que les trois constantes h_1, h_2, h_3 ont une même valeur h, ensuite que N_2, N_3 se déduisent de N en y permutant circulairement les varia-

Digitized by Google

bles; de sorte que l'on a

$$(34)\qquad \begin{cases} N_1 = \varphi(a_1, a_2, a_3), & T_1 = hb_1, \\ N_2 = \varphi(a_2, a_3, a_1), & T_2 = hb_2, \\ N_3 = \varphi(a_3, a_1, a_2), & T_3 = hb_3. \end{cases}$$

33. Supposons maintenant que, conservant l'axe OX, on permute les axes OY, OZ, ce qui change a_2, a_3 en a_3, a_2. La valeur de N_1 devant rester la même, la fonction φ doit être symétrique en a_2, a_3; elle est donc de la forme

$$A a_1 + B(a_2 + a_3),$$

ce que l'on peut écrire

$$B(a_1 + a_2 + a_3) + (A - B) a_1$$

ou bien

$$\lambda\theta + 2\mu a_1,$$

en désignant par θ la dilatation cubique et par λ, μ deux constantes. Les formules (34) deviennent ainsi

$$(35)\qquad \begin{cases} N_1 = \lambda\theta + 2\mu a_1, & T_1 = hb_1, \\ N_2 = \lambda\theta + 2\mu a_2, & T_2 = hb_2, \\ N_3 = \lambda\theta + 2\mu a_3, & T_3 = hb_3. \end{cases}$$

34. Supposons enfin que l'on fasse un changement quelconque d'axes coordonnés; on doit trouver les mêmes formes (35) et les mêmes coefficients pour les (N', T') en fonction des (a', b'); par exemple, on doit avoir

$$(36)\qquad N'_1 = \lambda\theta + 2\mu a'_1.$$

Or, en désignant par α_1, β_1, γ_1 les cosinus des angles que OX′ fait avec OX, OY, OZ, on a (n° 15)

$$(37)\qquad \begin{cases} N'_1 = N_1\alpha_1^2 + N_2\beta_1^2 + N_3\gamma_1^2 \\ \qquad + 2T_1\beta_1\gamma_1 + 2T_2\gamma_1\alpha_1 + 2T_3\alpha_1\beta_1 \end{cases}$$

Digitized by Google

et l'on a aussi (n° 26)

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} a'_1 &= a_1\alpha_1^2 + a_2\beta_1^2 + a_3\gamma_1^2 \\ &\quad + 2b_1\beta_1\gamma_1 + 2b_2\gamma_1\alpha_1 + 2b_3\alpha_1\beta_1. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, si l'on porte les valeurs (35) dans l'expression (37), on trouve

$$\begin{aligned} N'_1 = \lambda\theta &+ 2\mu(a_1\alpha_1^2 + a_2\beta_1^2 + a_3\gamma_1^2) \\ &+ 2h(b_1\beta_1\gamma_1 + b_2\gamma_1\alpha_1 + b_3\alpha_1\beta_1), \end{aligned}$$

ou bien, d'après la relation (38),

$$N'_1 = \lambda\theta + 2\mu a'_1 + 2(h - 2\mu)(b_1\beta_1\gamma_1 + b_2\gamma_1\alpha_1 + b_3\alpha_1\beta_1).$$

Donc, pour que cette valeur se réduise à l'expression (36), il faut que l'on ait $h - 2\mu = 0$. Le calcul des autres (N', T') conduit au même résultat.

35. En résumé, dans le cas des systèmes homogènes et isotropes, on obtient, pour les (N, T), les valeurs suivantes, renfermant deux coefficients constants λ, μ,

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu a_1, & T_1 &= 2\mu b_1, \\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu a_2, & T_2 &= 2\mu b_2, \\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu a_3; & T_3 &= 2\mu b_3. \end{aligned}\right.$$

La méthode qui a conduit à ce résultat repose sur les principes employés par Lamé dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (1856). Les expressions des tensions dans les milieux isotropes déformés ont été données pour la première fois par Cauchy (1827), en calculant directement la résultante des forces intérieures considérées comme fonctions des distances des points entre lesquels elles s'exercent. Cette autre méthode, qui permet de supposer que l'état primitif ne soit pas ce que nous avons appelé un *état naturel,* conduit à admettre que, lorsque la déformation a lieu à partir de cet état naturel, on a $\lambda = \mu$, de sorte

Digitized by Google

que les formules sont à un seul coefficient; mais ce point est encore l'objet de controverses.

36. *Expressions des* (N, T) *en fonction des déplacements* u, v, w. — En remplaçant dans les expressions (39) les déformations élémentaires (a, b) par leurs valeurs (16) du n° 18, il vient

$$(40)\quad \begin{cases} N_1 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{du}{dx}, & T_1 = \mu\left(\dfrac{dw}{dy} + \dfrac{dv}{dz}\right), \\ N_2 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{dv}{dy}, & T_2 = \mu\left(\dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}\right), \\ N_3 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{dw}{dz}, & T_3 = \mu\left(\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dy}\right), \end{cases}$$

et l'on a, dans ces formules,

$$(41)\qquad \theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Ces valeurs des (N, T) se rapportent à la position du point M après son déplacement, c'est-à-dire au point dont les coordonnées sont $x + u$, $y + v$, $z + w$; mais, quand le déplacement est très petit, on peut, comme nous le ferons dans les calculs qui suivent, rapporter les composantes des tensions au point (x, y, z).

IV. — Équations de l'équilibre et du mouvement intérieur pour les systèmes isotropes.

37. *Équations indéfinies.* — Les six fonctions (N, T) doivent vérifier les trois équations (5) du n° 9; dans ces équations, les quantités X_0, Y_0, Z_0 représentent, rapportées à l'unité de masse, les forces extérieures qui sollicitent le point M et elles comprennent,

Digitized by Google

si le système se déforme ou vibre, les forces d'inertie qui ont alors pour valeurs $-\frac{d^2u}{dt^2}$, $-\frac{d^2v}{dt^2}$, $-\frac{d^2w}{dt^2}$. En dégageant les forces d'inertie et représentant encore par X_0, Y_0, Z_0 les composantes des forces extérieures qui agissent sur la masse du point M, les équations (5) deviennent

$$(42)\quad \begin{cases} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \rho X_0 = \rho \frac{d^2u}{dt^2}, \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + \rho Y_0 = \rho \frac{d^2v}{dt^2}, \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + \rho Z_0 = \rho \frac{d^2w}{dt^2}, \end{cases}$$

ρ étant la densité du système au point M.

En substituant les valeurs (40) et en ayant égard à l'expression (41) de θ, on obtient les trois équations suivantes :

$$(43)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \rho X_0 = \rho \frac{d^2u}{dt^2}, \\ (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) + \rho Y_0 = \rho \frac{d^2v}{dt^2}, \\ (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right) + \rho Z_0 = \rho \frac{d^2w}{dt^2}. \end{cases}$$

L'expression différentielle

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}$$

est ce que Lamé a appelé le *paramètre différentiel du second ordre* de la fonction F. Nous représenterons ce paramètre par ΔF, en posant symboliquement

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

Digitized by Google

et les équations (43) prennent ainsi la forme simple

$$(44)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx}+\mu\,\Delta u+\rho X_0=\rho\,\dfrac{d^2u}{dt^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy}+\mu\,\Delta v+\rho Y_0=\rho\,\dfrac{d^2v}{dt^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz}+\mu\,\Delta w+\rho Z_0=\rho\,\dfrac{d^2w}{dt^2}. \end{cases}$$

Ces équations, dites *indéfinies*, sont applicables, indistinctement, à tous les points du système.

38. *Équations définies.* — En général, des efforts extérieurs donnés agissent sur la surface du système que l'on considère. Il en résulte de nouvelles équations qui doivent être satisfaites aux limites du corps, c'est-à-dire sur la surface seulement. On obtient ces nouvelles équations, dites *équations définies* ou *équations à la surface,* en écrivant que, pour un point quelconque de la surface limite, l'effort extérieur s'exerçant sur un élément plan de cette surface a la même grandeur et la même direction que la tension correspondante.

Soient, pour un point quelconque (x, y, z) de la surface limite,

F l'effort extérieur par unité de surface ;
l, m, n les cosinus directeurs de la force F ;
α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface ;
X, Y, Z les composantes de la tension.

Les équations à la surface sont

$$F\,l = X, \qquad F\,m = Y, \qquad F\,n = Z,$$

Digitized by Google

ou bien, en remplaçant X, Y, Z par les valeurs (7) du n° 10,

$$(45)\qquad \begin{cases} Fl = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ Fm = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ Fn = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma. \end{cases}$$

Les premiers membres de ces équations, ainsi que α, β, γ, doivent être considérés comme des fonctions données de x, y, z. En remplaçant les (N, T) par leurs valeurs en fonction des u, v, w, spécialement par les valeurs (40) dans le cas des milieux isotropes, on a trois équations auxquelles doivent satisfaire sur la surface limite les déplacements u, v, w, fonctions de x, y, z, t.

Les mêmes fonctions doivent satisfaire, dans toute l'étendue du milieu, aux équations indéfinies (44).

39. *Équilibre d'élasticité.* — Quand il s'agit de l'équilibre, les fonctions u, v, w sont indépendantes du temps et les seconds membres des équations (44) sont égaux à zéro.

Si l'on suppose de plus que les seules forces extérieures sont celles qui s'exercent sur la surface du milieu, les quantités X_0, Y_0, Z_0 disparaissent des équations (44) qui se réduisent aux suivantes :

$$(46)\qquad \begin{cases} (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\,\Delta u = 0, \\ (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dy} + \mu\,\Delta v = 0, \\ (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dz} + \mu\,\Delta w = 0. \end{cases}$$

On a ainsi trois équations différentielles auxquelles satisfont les déplacements u, v, w fonctions de x, y, z et il s'agit de trouver des solutions de ces équations telles que les équations à la surface (45) soient également satisfaites.

Digitized by Google

40. *Cas particulier.* — Supposons que les déplacements soient les dérivées partielles d'une fonction des coordonnées

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad v = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad w = \frac{d\varphi}{dz}.$$

On en tire

$$\theta = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \Delta\varphi,$$

et, par suite,

$$\Delta u = \Delta \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx}\Delta\varphi = \frac{d\theta}{dx}.$$

On a donc, dans ce cas particulier,

$$\Delta u = \frac{d\theta}{dx}, \qquad \Delta v = \frac{d\theta}{dy}, \qquad \Delta w = \frac{d\theta}{dz}$$

et, en supposant $\lambda + 2\mu$ différent de zéro, les équations (46) se réduisent aux suivantes

$$\frac{d\theta}{dx} = 0, \qquad \frac{d\theta}{dy} = 0, \qquad \frac{d\theta}{dz} = 0.$$

Pour qu'elles soient satisfaites, il faut et il suffit que *la dilatation cubique soit constante dans toute l'étendue du système déformé.*

V. — Exemples d'équilibre.

a. — Compression normale et uniforme.

41. Soit un système élastique soumis, sur toute sa surface, à une pression normale et uniforme P. La direction (l, m, n) de cette pression étant opposée à la direction (α, β, γ) de la normale extérieure, les équations définies (45) deviennent

$$(47) \qquad \begin{cases} -P\alpha = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ -P\beta = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ -P\gamma = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma. \end{cases}$$

Digitized by Google

Supposons maintenant que, l'origine des coordonnées restant fixe, les déplacements u, v, w soient représentés par les valeurs

$$(48) \qquad u = -ax, \qquad v = -ay, \qquad w = -az,$$

a étant un coefficient à déterminer.

Par ces valeurs, les équations indéfinies (46) sont évidemment satisfaites; les T sont nuls et les N se réduisent à $-(3\lambda + 2\mu)$. Donc, pour satisfaire aux équations (47), il suffit de prendre

$$a = \frac{P}{3\lambda + 2\mu}.$$

Les déplacements (48) satisfont alors à toutes les conditions de l'équilibre d'élasticité.

b. — Extension longitudinale d'un prisme.

42. Considérons un solide prismatique dont les arêtes soient parallèles à OZ : soit F la traction, rapportée à l'unité de surface, qui agit sur chacune de ses bases. Nous allons vérifier que, dans l'équilibre d'élasticité, les déplacements peuvent être représentés par les valeurs

$$(49) \qquad u = -ax, \qquad v = -ay, \qquad w = cz,$$

a et c étant des constantes convenablement déterminées.

En effet, ces valeurs vérifient d'abord les équations (46); de plus, d'après les formules (40), elles donnent, pour les T, des valeurs nulles et, pour les N, des valeurs constantes dans toute l'étendue du milieu

$$N_1 = N_2 = (c - 2a)\lambda - 2a\mu,$$
$$N_3 = (c - 2a)\lambda + 2c\mu.$$

Or N_1, N_2 sont nuls à la surface latérale du prisme et N_3

Digitized by Google

est égal à F sur les bases; on a donc les équations

$$\lambda c - 2(\lambda + \mu)a = 0,$$
$$(\lambda + 2\mu)c - 2\lambda a = F,$$

d'où l'on tire

$$(50) \qquad c = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F, \qquad a = \frac{1}{2} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F.$$

Avec ces valeurs, les déplacements (49) satisfont à toutes les conditions d'équilibre.

c. — *Équilibre d'une couche sphérique.*

43. Soit un solide homogène et isotrope limité par deux sphères concentriques. Ce solide est soumis, sur chacune des surfaces sphériques, à une pression normale et uniforme; on se propose de déterminer l'état d'équilibre.

Plaçant l'origine au centre de figure, considérons un point quelconque M; désignons par x, y, z ses coordonnées dans l'état naturel et par r sa distance à l'origine, de sorte que

$$(51) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Les forces appliquées au solide sont évidemment telles que, par suite de la déformation, le point M se déplace sur le rayon mené de l'origine à sa position primitive et la grandeur du déplacement ε est la même pour tous les points primitivement situés à la même distance de l'origine. On a donc

$$(52) \qquad u = \varepsilon \frac{x}{r}, \qquad v = \varepsilon \frac{y}{r}, \qquad w = \varepsilon \frac{z}{r},$$

ε étant une fonction de r à déterminer.

Digitized by Google

44. Remarquons d'abord que ces valeurs de u, v, w sont les dérivées partielles d'une fonction φ de x, y, z. On a, en effet,

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \varepsilon \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r}.$$

Or la relation (51) donne

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r dr,$$

donc l'expression précédente est égale à $\varepsilon\,dr$ et elle est, par suite, la différentielle totale de la fonction

$$\varphi = \int \varepsilon\,dr. \tag{53}$$

Il en résulte (n° 40) que, pour satisfaire aux équations indéfinies de l'équilibre, il suffit d'exprimer que la dilatation cubique est constante. Or on déduit des valeurs (52)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{x^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - x^2}{r^3}\varepsilon, \\ \frac{dv}{dy} &= \frac{y^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - y^2}{r^3}\varepsilon, \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{z^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - z^2}{r^3}\varepsilon. \end{aligned}\right. \tag{54}$$

Il en résulte

$$\theta = \frac{d\varepsilon}{dr} + 2\frac{\varepsilon}{r}, \tag{55}$$

et l'on a, par conséquent, en désignant par c une constante,

$$\frac{d\varepsilon}{dr} + 2\frac{\varepsilon}{r} = 3c. \tag{56}$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\varepsilon = cr + \frac{b}{r^2}, \tag{57}$$

b étant une nouvelle constante arbitraire.

Par cette valeur de ε, les déplacements (52) satisfont

Digitized by Google

aux équations indéfinies; nous allons maintenant déterminer b et c, de manière à satisfaire aux équations définies.

45. Substituant à cet effet les valeurs (52) dans les expressions (40) des N, T, il vient

$$(58)\quad \begin{cases} N_1 = 3\lambda c + 2\mu\left(\frac{x^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - x^2}{r^3}\varepsilon\right), & T_1 = 2\mu\frac{yz}{r^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon}{r}\right), \\ N_2 = 3\lambda c + 2\mu\left(\frac{y^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - y^2}{r^3}\varepsilon\right), & T_2 = 2\mu\frac{zx}{r^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon}{r}\right), \\ N_3 = 3\lambda c + 2\mu\left(\frac{z^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - z^2}{r^2}\varepsilon\right), & T_3 = 2\mu\frac{xy}{r^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon}{r}\right). \end{cases}$$

On simplifie l'étude des tensions autour d'un point en faisant passer par ce point l'axe des x; on a ainsi $x = r$, $y = 0$, $z = 0$ et les valeurs (58) donnent

$$N_1 = 3\lambda c + 2\mu\frac{d\varepsilon}{dr},$$

$$N_2 = N_3 = 3\lambda c + 2\mu\frac{\varepsilon}{r}.$$

Les composantes tangentielles étant nulles, on voit que les tensions N_1, N_2, N_3 sont principales; la condition $N_2 = N_3$ montre que l'ellipsoïde des tensions est de révolution autour du rayon mené du centre au point considéré.

En remplaçant enfin ε par sa valeur (57), les expressions des tensions N deviennent

$$(59)\quad \begin{cases} N_1 = (3\lambda + 2\mu)c - \frac{4\mu b}{r^3}, \\ N_2 = N_3 = (3\lambda + 2\mu)c + \frac{2\mu b}{r^3}. \end{cases}$$

Désignons maintenant par r_0, r_1 les rayons des surfaces sphériques qui limitent intérieurement et extérieurement le solide et par P_0, P_1 les pressions qui s'exercent

Digitized by Google

normalement et uniformément sur ces surfaces; en exprimant que N_1 se réduit à $-P_0$ sur la surface intérieure et à $-P_1$ sur la surface extérieure, on a deux équations

$$(60)\qquad \begin{cases} (3\lambda+2\mu)c-\dfrac{4\mu b}{r_0^3}=-P_0, \\ (3\lambda+2\mu)c-\dfrac{4\mu b}{r_1^3}=-P_1, \end{cases}$$

qui déterminent b, c, et, par les valeurs que l'on obtient ainsi, toutes les conditions d'équilibre sont satisfaites.

On tire des équations (60)

$$(61)\quad c=\frac{r_0^3P_0-r_1^3P_1}{(3\lambda+2\mu)(r_1^3-r_0^3)},\qquad b=\frac{(P_0-P_1)r_0^3r_1^3}{4\mu(r_1^3-r_0^3)},$$

et, en portant ces valeurs dans les formules (57) et (59), on obtient la solution complète du problème.

d. — Équilibre d'une couche cylindrique.

46. Soit un solide homogène et isotrope limité par deux cylindres de révolution concentriques et par deux plans perpendiculaires aux arêtes. Ce solide est soumis, sur chacune des surfaces cylindriques, à une pression normale et uniforme, et sur chacune des bases à une traction parallèle aux arêtes; on se propose de déterminer l'état d'équilibre.

Plaçant l'origine au centre de figure, prenons l'axe OZ parallèle aux arêtes; soient, dans l'état naturel, x, y, z les coordonnées d'un point M du solide et r la distance de ce point à l'axe OZ, de sorte que

$$(62)\qquad r^2=x^2+y^2.$$

Par suite de la déformation, le point M se déplace évidemment dans le plan méridien passant par sa position primitive, et l'on peut décomposer son déplacement en

Digitized by Google

deux : l'un ε suivant la direction de la distance r, l'autre w parallèle aux arètes.

Nous supposerons que ε ne dépend que de r, et que w est proportionnel à z. Posant, en conséquence,

$$(63) \qquad u = \varepsilon \frac{x}{r}, \qquad v = \varepsilon \frac{y}{r}, \qquad w = cz,$$

nous allons vérifier que l'on satisfait à toutes les conditions de l'équilibre par des valeurs convenables de la fonction ε et de la constante c.

47. Les valeurs (63) donnent d'abord

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \varepsilon \frac{x\,dx + y\,dy}{r} + cz\,dz,$$

et l'on a, par la relation (62),

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr.$$

Il en résulte que l'expression précédente est égale à $\varepsilon\,dr + cz^2$, et qu'elle est par suite la différentielle totale de la fonction

$$(64) \qquad \varphi = \int \varepsilon\,dr + \frac{1}{2} cz^2.$$

Les valeurs (63) des déplacements sont donc les dérivées partielles de la fonction φ et il suffit, pour satisfaire aux équations indéfinies de l'équilibre, d'exprimer que la dilatation cubique est constante. Or on déduit des valeurs (63)

$$(65) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{x^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{y^2}{r^3}\varepsilon, \\ \frac{dv}{dy} &= \frac{y^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{x^2}{r^3}\varepsilon, \\ \frac{dw}{dz} &= c. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Il en résulte

$$\theta = \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{\varepsilon}{r} + c, \tag{66}$$

et, par suite, en désignant par a une constante, on peut écrire

$$\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{\varepsilon}{r} = 2a. \tag{67}$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\varepsilon = ar + \frac{b}{r}, \tag{68}$$

et, en adoptant cette valeur, les déplacements satisfont aux équations indéfinies, quelles que soient les constantes arbitraires a, b, c; nous allons déterminer ces constantes de manière à satisfaire aux équations définies ou conditions à la surface.

48. Substituons les valeurs (63) dans les expressions (40) des (N, T). En remarquant que, d'après les relations (66) et (67), on a

$$\theta = 2a + c,$$

on trouve

$$(69)\quad \left\{\begin{array}{ll} N_1 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(\frac{x^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{y^2}{r^3}\varepsilon\right), & T_1 = 0, \\ N_2 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(\frac{y^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{x^2}{r^3}\varepsilon\right), & T_2 = 0, \\ N_3 = \lambda(2a + c) + 2\mu c & T_3 = 2\mu\frac{xy}{r^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon}{r}\right). \end{array}\right.$$

Pour simplifier l'étude des tensions autour d'un point, faisons passer par ce point le plan XOZ; on a alors

$$x = r, \qquad y = 0,$$

Digitized by Google

et les valeurs ci-dessus deviennent

$$N_1 = \lambda(2a + c) + 2\mu\frac{d\varepsilon}{dr}, \qquad T_1 = 0,$$

$$N_2 = \lambda(2a + c) + 2\mu\frac{\varepsilon}{r}, \qquad T_2 = 0,$$

$$N_3 = \lambda(2a + c) + 2\mu c, \qquad T_3 = 0.$$

Les composantes tangentielles étant nulles, les tensions N_1, N_2, N_3 sont principales. En remplaçant ε par sa valeur (68), les expressions de ces tensions peuvent s'écrire

$$(70) \qquad \begin{cases} N_1 = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \dfrac{2\mu b}{r^2}, \\ N_2 = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c + \dfrac{2\mu b}{r^2}, \\ N_3 = 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c. \end{cases}$$

Désignons maintenant par r_0, r_1 les rayons des surfaces cylindriques qui limitent intérieurement et extérieurement le solide, et par P_0, P_1 les pressions qui s'exercent normalement et uniformément sur ces surfaces; soit enfin F la traction appliquée sur l'unité de surface de chacune des deux bases. En exprimant que l'on a :

1° Sur la surface cylindrique intérieure, $N_1 = -P_0$;
2° Sur la surface cylindrique extérieure, $N_1 = -P_1$;
3° Sur la base, $N_3 = F$, on a trois équations

$$(71) \qquad \begin{cases} 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \dfrac{2\mu b}{r_0^2} = -P_0, \\ 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \dfrac{2\mu b}{r_1^2} = -P_1, \\ 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c = F, \end{cases}$$

qui déterminent a, b, c, et, par les valeurs que l'on obtient ainsi, toutes les conditions d'équilibre sont satisfaites.

Digitized by Google

La première et la deuxième des équations (71) donnent d'abord

$$(72)\quad \begin{cases} 2(\lambda+\mu)a+\lambda c = \dfrac{r_0^2 P_0 - r_1^2 P_1}{r_0^2 - r_0^2}, \\ b = \dfrac{(P_0 - P_1) r_0^2 r_1^2}{2\mu(r_1^2 - r_0^2)}, \end{cases}$$

et ces relations donnent les valeurs définitives de N_1, N_2. Enfin la troisième équation (71) et la première (72) donnent a et c, de sorte qu'on a le système de valeurs

$$(73)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \dfrac{r_0^2 P_0 - r_1^2 P_1}{r_1^2 - r_0^2} - \dfrac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} F, \\ b = \dfrac{1}{2\mu} \dfrac{(P_0 - P_1) r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}, \\ c = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} F - \dfrac{\lambda}{\mu(3\lambda+2\mu)} \dfrac{r_0^2 P_0 - r_1^2 P_1}{r_1^2 - r_0^2}, \end{cases}$$

qui donne la solution complète du problème.

VI. — Mouvements intérieurs des systèmes isotropes.

49. *Équations des mouvements intérieurs.* — Considérons un système élastique homogène, isotrope, soustrait à toute force extérieure et indéfini dans tous les sens; supposons que les points de ce système, ayant été déplacés, soient abandonnés avec des vitesses initiales à l'action des forces intérieures. Le milieu se mettra en mouvement, et, si l'on désigne par u, v, w les projections du déplacement du point dont les coordonnées étaient x, y, z dans l'état d'équilibre, ces projections devront être considérées comme des fonctions de x, y, z et du temps t.

Ces fonctions satisfont aux équations (44) qui, en faisant abstraction des forces extérieures X_0, Y_0, Z_0,

Digitized by Google

deviennent

$$(74)\qquad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx}+\mu\,\Delta u=\rho\dfrac{d^2u}{dt^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy}+\mu\,\Delta v=\rho\dfrac{d^2v}{dt^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz}+\mu\,\Delta w=\rho\dfrac{d^2w}{dt^2}. \end{cases}$$

Le problème général des mouvements vibratoires consiste à trouver des fonctions u, v, w satisfaisant à ces trois équations aux dérivées partielles du second ordre, et telles que leurs valeurs initiales, ainsi que celles de leurs dérivées $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, soient des fonctions données des coordonnées x, y, z.

Nous nous bornerons à montrer, par un exemple simple, comment on peut, à l'aide des équations (74), étudier les propriétés de mouvements particuliers pour lesquels on connaît *a priori* la forme des fonctions qui représentent les déplacements.

50. *Mouvements simples.* — On appelle *mouvement simple* ou *mouvement par ondes planes* tout mouvement dans lequel les déplacements sont de la forme

$$(75)\qquad \begin{cases} u=p\cos(ax+by+cz-st+\varphi), \\ v=q\cos(ax+by+cz-st+\varphi), \\ w=r\cos(ax+by+cz-st+\varphi), \end{cases}$$

p, q, r; a, b, c; s, φ désignant des constantes.

Examinons d'abord les propriétés générales de ces mouvements que l'on a à considérer dans un grand nombre de théories physiques.

51. Les formules (75) montrent d'abord que l'on a constamment

$$\frac{u}{p}=\frac{v}{q}=\frac{w}{r},$$

Digitized by Google

de sorte que, pour un point quelconque, le mouvement est *rectiligne*.

Désignons par ρ la distance du point (x, y, z) au plan, passant par l'origine, représenté par l'équation

$$aX + bY + cZ = 0. \tag{76}$$

En posant

$$h^2 = a^2 + b^2 + c^2, \tag{77}$$

on a

$$h\rho = ax + by + cz,$$

et les formules (75) peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} u &= p\cos(h\rho - st + \varphi), \\ v &= q\cos(h\rho - st + \varphi), \\ w &= r\cos(h\rho - st + \varphi), \end{aligned}\right. \tag{78}$$

On en conclut que tous les points situés à la même distance du plan représenté par l'équation (76) sont, au même instant, déplacés de la même manière : de là la dénomination de mouvements par ondes planes donnée aux mouvements dont il s'agit.

52. Pour une valeur donnée de t, les déplacements u, v, w prennent les mêmes valeurs lorsque ρ s'accroît d'une quantité l, telle que $hl = 2\pi$; cette quantité, déterminée par la relation

$$l = \frac{2\pi}{h}, \tag{79}$$

représente ce que l'on appelle la *longueur d'ondulation*.

Pour une valeur donnée de ρ, les déplacements u, v, w prennent les mêmes valeurs lorsque t s'accroît d'une

Digitized by Google

quantité τ, telle que $s\tau = 2\pi$; cette quantité, déterminée par la relation

$$\tau = \frac{2\pi}{s}, \tag{80}$$

représente ce que l'on appelle la *durée de la vibration*.

Enfin, les valeurs des déplacements restent les mêmes si l'on fait croître t de Δt et ρ de $\Delta\rho$, pourvu que l'on suppose

$$h\,\Delta\rho - s\,\Delta t = 0, \tag{81}$$

par conséquent

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = \omega,$$

la valeur de ω étant

$$\omega = \frac{s}{h} = \frac{l}{\tau}. \tag{82}$$

La quantité ω, déterminée par la relation (82), représente la *vitesse de propagation*.

53. *Mouvements simples compatibles.* — Cherchons maintenant les conditions auxquelles doivent satisfaire les déplacements d'un mouvement simple pour que ce mouvement puisse se propager dans un milieu isotrope donné, c'est-à-dire soit *compatible* avec la constitution de ce milieu.

Les expressions (75) doivent alors satisfaire aux équations (74); si l'on pose, pour simplifier,

$$ax + by + cz - st + \varphi = \psi,$$

les valeurs (78) donnent

$$\theta = -(ap + bq + cr)\sin\psi, \qquad \frac{d\theta}{dx} = -a(ap + bq + cr)\cos\psi,$$

$$\Delta u = -h^2 p\cos\psi, \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = -s^2 p\cos\psi,$$

Digitized by Google

et la substitution de ces valeurs, dans la première des équations (74), donne, en supprimant le facteur commun $\cos\psi$, la première des équations

$$(83)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)a(ap+bq+cr)+(\mu h^2-\rho s^2)p=0, \\ (\lambda+\mu)b(ap+bq+cr)+(\mu h^2-\rho s^2)q=0, \\ (\lambda+\mu)c(ap+bq+cr)+(\mu h^2-\rho s^2)r=0, \end{cases}$$

les deux autres résultant de la substitution des valeurs (75), faite de la même manière, dans la seconde, puis dans la troisième des équations (74).

54. Si l'on ajoute les trois équations (83), respectivement multipliées par a, b, c, on trouve

$$(84)\qquad (ap+bq+cr)[(\lambda+2\mu)h^2-\rho s^2]=0.$$

Il faut donc que l'on ait, ou $(\lambda+2\mu)h^2-\rho s^2=0$, ou $ap+bq+cr=0$.

55. *Vibrations longitudinales.* — Dans le premier cas, la relation

$$(\lambda+2\mu)h^2-\rho s^2=0$$

donne, pour la vitesse de propagation $\omega=\frac{s}{h}$,

$$(85)\qquad \omega=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}.$$

De plus, puisque $\mu h^2-\rho s^2=-(\lambda+\mu)h^2$, les équations (83) donnent

$$(86)\qquad \frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}.$$

Or p, q, r sont proportionnels à u, v, w; a, b, c sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale au plan fixe représenté par l'équation (61); donc les relations (86) expriment que *la vibration est perpendiculaire au plan de l'onde.*

Digitized by Google

Les vibrations simples, normales à l'onde plane, se propageant avec la vitesse (85), sont dites *longitudinales*.

56. *Vibrations transversales.* — Dans le second cas, l'équation $ap + bq + cr = 0$ exprime que *la vibration s'effectue dans le même plan de l'onde;* de plus, les relations (83) se réduisent à

$$\mu h^2 - \rho s^2 = 0,$$

ce qui donne, pour la vitesse de propagation,

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{87}$$

La dilatation cubique, donnée par la formule $\theta = -(ap + bq + cr)\cos\psi$, est égale à zéro, de sorte que le mouvement a lieu sans que la densité du milieu soit altérée.

Les vibrations simples, parallèles à l'onde plane, se propageant avec la vitesse (87), sont dites *transversales*.

57. En résumé, les mouvements simples qui peuvent se propager dans un milieu homogène et isotrope appartiennent nécessairement à l'un des deux systèmes de vibrations, longitudinales ou transversales. Les vitesses de propagation, différentes pour les deux systèmes, ont, pour chaque système, une valeur déterminée restant la même quelles que soient les durées et les amplitudes des vibrations propagées. Enfin il est à remarquer que, dans tout mouvement longitudinal, la direction de la vibration est déterminée; le mouvement est *polarisé*. Au contraire, dans tout mouvement transversal, la vibration n'est assujettie qu'à être dans le plan de l'onde; son orientation dans ce plan peut être quelconque.

Digitized by Google

58. *Propagation de la lumière dans un milieu isotrope.* — Dans la théorie des ondulations, on attribue les phénomènes lumineux aux vibrations d'un milieu élastique particulier. On admet que, dans les corps non cristallisés, ce milieu peut être considéré comme isotrope et l'on suppose que ses vibrations sont régies par les équations (74), avec la condition spéciale $\lambda + 2\mu = 0$. En posant $\frac{\mu}{\rho} = e$, les équations peuvent alors s'écrire

$$(88)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= e\left(\Delta u - \frac{d\theta}{dx}\right),\\ \frac{d^2v}{dt^2} &= e\left(\Delta v - \frac{d\theta}{dy}\right),\\ \frac{d^2w}{dt^2} &= e\left(\Delta w - \frac{d\theta}{dz}\right). \end{aligned}\right.$$

La condition $\lambda + 2\mu = 0$ attribue une valeur nulle à la vitesse de propagation des ondes longitudinales, de sorte que, par suite de l'hypothèse admise, le milieu ne peut propager que des ondes planes transversales, non polarisées avec la vitesse $\omega = \sqrt{e}$, la même dans toutes les directions.

59. *Propagation de la lumière dans un milieu cristallisé.* — On peut rattacher la théorie physique de la double réfraction cristalline à la théorie de l'élasticité en admettant que, dans un cristal transparent, il existe trois directions telles qu'en rapportant à ces directions les vibrations de l'éther, ces vibrations soient régies par les équations

$$(89)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= e\left(\Delta u - \frac{d\theta}{dx}\right),\\ \frac{d^2v}{dt^2} &= f\left(\Delta v - \frac{d\theta}{dy}\right),\\ \frac{d^2w}{dt^2} &= g\left(\Delta w - \frac{d\theta}{dz}\right), \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

qui ne diffèrent de celles des corps isotropes que par la substitution de trois coefficients distincts e, f, g au coefficient unique e.

Pour qu'un mouvement, représenté par les formules (75), puisse se propager dans le milieu, il faut que les déplacements u, v, w satisfassent aux équations (89); en opérant comme au n° 53, on trouve les trois conditions

$$(90)\qquad \begin{cases} s^2 p = e\,[h^2 p - a(ap + bq + cr)], \\ s^2 q = f\,[h^2 q - b(ap + bq + cr)], \\ s^2 r = g\,[h^2 r - c(ap + bq + cr)]. \end{cases}$$

Désignons par l, m, n les cosinus directeurs de la normale à l'onde plane, de sorte que

$$l = \frac{a}{h}, \qquad m = \frac{b}{h}, \qquad n = \frac{c}{h}.$$

En divisant par h^2 les équations (90) et observant que $\frac{s}{h} = \omega$, il vient

$$(91)\qquad \begin{cases} (\omega^2 - e)\,p = -\,el\,(lp + mq + nr), \\ (\omega^2 - f)\,q = -\,fm\,(lp + mq + nr), \\ (\omega^2 - g)\,r = -\,gn\,(lp + mq + nr). \end{cases}$$

Ces équations sont linéaires et homogènes en p, q, r, et, en éliminant ces trois quantités, on a une équation du troisième degré en ω^2 donnant les vitesses différentes avec lesquelles une onde plane peut se propager dans la direction (l, m, n). Pour faire l'élimination, il suffit d'écrire les équations de la manière suivante :

$$(92)\qquad \frac{p}{\dfrac{el}{\omega^2 - e}} = \frac{q}{\dfrac{fm}{\omega^2 - f}} = \frac{r}{\dfrac{gn}{\omega^2 - g}} = -(lp + mq + nr)$$

On en déduit immédiatement l'équation

$$(93)\qquad \frac{el^2}{\omega^2 - e} + \frac{fm^2}{\omega^2 - f} + \frac{gn^2}{\omega^2 - g} + 1 = 0,$$

qui admet une *racine nulle*.

Digitized by Google

Pour cette racine, les équations (92) donnent

$$\frac{p}{l} = \frac{q}{m} = \frac{r}{n};$$

ces équations correspondent à un mouvement simple *longitudinal;* mais la condition $\omega^2 = 0$ montre que ce mouvement ne peut pas se propager.

Les deux autres racines ω^2 sont fournies par l'équation

$$(94) \qquad \frac{l^2}{\omega^2 - e} + \frac{m^2}{\omega^2 - f} + \frac{n^2}{\omega^2 - g} = 0,$$

qui coïncide avec l'équation aux vitesses des ondes planes trouvée par Fresnel.

A chacune de ses racines correspond, d'après les équations (77), une direction déterminée de la vibration, de sorte que, dans chaque direction, se propagent, avec des vitesses différentes, deux ondes planes polarisées.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. VII; novembre et décembre 1888.)

14974 Paris — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google